Bewegung eines Bootes*

Aufgabennummer: B_074

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Bewegung eines Bootes wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k \cdot v$$

m … Masse des Bootes
$v > 0$ … Geschwindigkeit des Bootes
$k > 0$ … Konstante
t … Zeit

– Argumentieren Sie mathematisch anhand der Differenzialgleichung, dass die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit t abnimmt.
– Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

b) Ein Boot wird von einem Motorboot geschleppt. Zur Zeit $t = 0$ s wird das Schleppseil gelöst.
Die nachstehende Tabelle gibt die Geschwindigkeit des Bootes zu 4 verschiedenen Zeiten an.

Zeit in s	3	9	15	21
Geschwindigkeit in m/s	6,5	2,5	1,1	0,5

– Ermitteln Sie mithilfe der Daten aus der obigen Tabelle eine Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit des Bootes beschreibt.
– Ermitteln Sie mit dieser Ausgleichsfunktion einen Schätzwert für die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s.

c) Für einen bestimmten Zeitraum kann der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines anderen Motorboots durch die Funktion v_{MB} näherungsweise beschrieben werden:

$$v_{MB}(t) = a + b \cdot (e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-t})$$

t ... Zeit
$v_{MB}(t)$ ... Geschwindigkeit des Motorboots zur Zeit t
a, b ... positive Konstante

– Argumentieren Sie mathematisch, dass die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote dieser Funktion ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m} \cdot v$

Da v, m und k größer als null sind, bedeutet das Minuszeichen, dass die Geschwindigkeit abnimmt.

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

oder:

$\int \frac{v'}{v} \mathrm{d}t = \int -\frac{k}{m} \mathrm{d}t$

$\ln|v(t)| = -\frac{k}{m} \cdot t + C_1$

$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

b) Ermitteln der Gleichung der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$v(t) = 9{,}49 \cdot 0{,}8677^t$ *(Parameter gerundet)*

oder:

$v(t) = 9{,}49 \cdot e^{-0{,}1419 \cdot t}$ *(Parameter gerundet)*

t ... Zeit in s

$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in s

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$v(5) = 4{,}66...$

Die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s beträgt rund 4,7 m/s.

c) Für t gegen unendlich gehen $e^{-0{,}1 \cdot t}$ und e^{-t} gegen null und damit geht auch $b \cdot (e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-t})$ gegen null. Somit ist die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote von v_{MB}.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Argumentation
   1 × B: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion
   1 × B2: für das richtige Ermitteln der Geschwindigkeit

c) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation